金融经济领域中的不确定性研究综述 *

王增武

〔摘　要〕本文综述了 Choquet 容度和 Choquet 积分在刻画金融经济领域中不确定性上的应用，包含非期望效用、资产定价、保险理论、投资消费储蓄理论和宏观经济等五个方面，同时给出不确定性领域的进一步研究方向：动态相容性、理性、效用的合理定义以及非期望效用的推广等。

关键词：Choquet 容度　Choquet 积分　风险　不确定性

JEL 分类号：D80　D81

一、引　言

有关金融经济的研究文献或时评文章中，出现频率最高的词语之一当属不确定性。但到底何为“不确定性”？在不同的语境表达的含义不同，如模型不确定性、参数不确定性、数据不确定性、时间不确定性和状态不确定性等，表述的含义有所交叉但又不尽相同，研究方法和研究思路同样也迥然有异。熟知，经典的概率论理论是处理不确定性的主要手段之一，确切而言，概率论所处理的是状态不确定性，即决策者可以确定状态空间的具体状态及未来各状态发生的可能性，但无法预测未来发生的具体状态，Knight（1921）将这种不确定性定义为风险（Risk），以将其与真正意义上的不确定性（Uncertainty，Ambiguity①）区分开来，后者表示决策者只能确定状态空间中的具体状态，不仅无法预测未来发生的具体状态，更无法唯一确定状态空间中各状态发生的可能性。简言之，风险可以用唯一的概率测度进行表示，不确定性无法用唯一的概率测度进行表示，也就是说不确定性是不可度量的风险。

为刻画不确定性，Choquet（1953）给出与概率测度和数学期望相容的非可加集函数和对应积分的定义，后人为纪念 Choquet 而将其命名为 Choquet 容度和 Choquet 积分。Choque（1953）在Choquet 容度和 Choquet 积分框架下给出部分与经典概率论平行的理论结果，诸多学者后期也进行大量的跟踪总结，主要进展体现在如下六个方面：

第一，Choquet 积分的表示定理，有关这方面的研究最早是由 Greco（1982）提出的，后续研究工作可见 Schmeidler（1986）和 Zhou（1998）。Song and Yan（2006a，2006b）在更弱条件下讨论有关 Choquet 积分、上下 Choquet 积分的表示定理。

第二，Choquet 积分框架下的 Radon–Nikodym 定理和 Bayes 定理分别由 Graf（1980）和Wasserman and Kadane（1990）给出并予以证明。

第三，Choquet 积分框架下的收敛定理成立需要一定的假设条件，如单调收敛定理、Fatou 引理和 Lebesgue 控制收敛，具体假设条件参见 Denneberg（1994）。

第四，Ghirardato（1997）首次给出 Choquet 积分 Fubini 定理的定义及其推导证明。

---

*　王增武，中国社会科学院金融研究所，副研究员。

①　国内学者通常将 Uncertainty 等同于 Risk，通译为“不确定性”。为区别起见，可以用 Risk 表示风险及通常意义上的不确定性，用 Ambiguity 表示不确定性。

第五,熵与大数定律,前者由 Marichal(2002)首次给出并证明相关性质,后者则由 Maccheroni and Marinacci(2005)给出。

第六,更新准则。如何在 Choquet 容度和 Choquet 积分框架下进行信息更新?关于这方面的研究工作由来已久,详见 Dempster(1967)、Shafer(1976)、Gilboa and Schmeidler(1993)、Cohen et al.(2000)、Chateauneuf et al.(2001)、Denneberg(1994,2002)、Lehrer(2005)和 Lapied and Kast(2005)。然而,上述各种定义均存在一定程度的局限性。关于这方面的研究目前仍然是一个具有挑战性的公开问题,值得后续研究。有关理论研究的更多结果介绍参见 Wang and Yan(2007)及其中的参考文献。

如前所述,Knight(1921)首次区分风险和不确定性的定义,并考察其对完全竞争假设下企业利润的影响。易见,理论的发展远远滞后于应用的需要,这也进一步表明理论是为应用服务的。有关 Choquet 容度和 Choquet 积分在其他学科中的应用大致可总结为如下八个方面:

其一,统计领域。Huber(1973)利用 Choquet 积分理论去解释稳健 Bayesian 推断的含义,关于在统计方面应用的综述文章可见 Wasserman(1990)。

其二,博弈论领域。容度和 Choquet 积分受到经济学家们的关注起始于 Shapely(1953)在研究合作博弈时的一篇论文,后期 Dempster(1967)和 Shafer(1976)又将不确定性和信念的表示与 Choquet 积分理论联系起来。

其三,经济领域。Schmeidler(1989)把 Choquet 积分理论应用到决策理论中去,给出了 Choquet 期望效用理论的公理化刻画,关于这方面的文献还可参考 Quiggin(1982)和 Yaari(1987)。

其四,定价领域。为了"捕捉"金融市场中的摩擦和消费者的不确定厌恶,Chateauneaf et al.(1996)首次明确提出利用 Choquet 积分进行定价,Dow and Werlang(1992a,1992b)则利用 Choquet 定价解释投资惰性和股价的过渡波动性问题,Chen and Kulperger(2006)讨论了上(下)Choquet 定价和最大、最小定价之间的关系。

其五,保险领域。扭曲概率是介于概率测度和容度之间的一种特殊容度,此类容度在保险领域中有重要的应用。首先,Wang et al.(1997)首次给出基于扭曲概率的保费原理的公理化刻画;其次,Cardinand Ferretti(2001)基于 Choquet 积分在不确定意义下给出保费原理的公理化刻画;再者,Denuitet al.(2006)讨论风险度量和保费原理(非期望效用下的效用等价原理)之间的关系。

其六,多准则决策领域。在人文社会科学和实际操作中,通常采用单一指标去衡量个体的优劣,如通过加权平均后的总成绩来衡量学生的在校表现。为了考虑准则之间的相关性,可用Choquet 积分代替原来的加权平均,即多准则决策问题。关于这方面的文献可参见 Grabisch(1996),Marichal(2000)和 Kojadinovic(2007)。

其七,投资决策领域。Schied(2007)讨论不确定意义下的最优投资问题,Jin and Zhou(2006)在完备市场情形下讨论了行为投资组合问题,其他领域如博弈论(Eichberger and Kelsey,1994),最优合同问题(Mukerji and Tallon,2001),单调均值方差领域(Maccheroni,et al.,2009)和储蓄消费理论(Miao,2004)。

其八,宏观经济研究。Krishnamurhty(2010)研究不确定性对流动性危机的放大作用,Zhao(2007)研究不确定性环境中的最优货币政策选择问题,Elasey and O'Hara(2009)从不确定性视角解释证券市场中的非参与之谜,Pristsker(2010)研究不确定性对资金融入融出利差的影响。

限于篇幅,本综述我们聚焦 Choquet 容度和 Choquet 积分在金融和经济领域的应用方面。为方便读者阅读,我们进行两个特殊处理:一是在介绍主要内容之前尽可能地给出通俗易懂的具体示例;二是正文基本以叙述为主,数学公式和数学推导放在脚注位置。

二、不确定性的定义与刻画

例 1(抛硬币)实验 A 表示抛一枚均匀硬币,由经典的概率论知识知,我们可以确定未来出现的状态是正面(H)或反面(T)且二者出现的可能性均为 1/2。实验 B 表示抛一枚非均匀程度未知的非均匀硬币,此时我们最多可以确定未来出现 H 或 T,但无法未来状态发生的唯一概率,只能确定其介于 0 和 1 之间。实验 A 表示风险(Risk),实验 B 表示不确定性(Ambiguity)。

在例 1 中,我们将不确定性翻译为 Ambiguity,主要原因是区别于通常意义上的 Uncertainty。熟知,用经典的概率论来刻画市场中的 Risk/Uncertainty,概率测度是满足非负性、规范性和可加性的集函数。进一步,由概率测度的可加性可导出概率测度满足单调性,即如果集合 A 包含于集合B,则集合 A 的概率测度值同样也小于集合 B 的概率测度值。为给出与概率测度相容性的刻画 Ambiguity 的集函数,Choquet(1953)引入满足规范性和单调性的非可加集函数,后人将其命名为 Choquet 容度[①]。注意到,Choquet 容度与概率测度相容性的主要原因在于前者定义中单调性是由后者的可加性导出的,这表明在可加性的假设条件下,Choquet 容度将退化为概率测度。另外,在 Choquet 容度的规范性中增加“全空间 Choquet 容度为 1”的约束条件,主要原因有二:第一,对 Choquet 容度进行标准和“归一化”处理;第二,在概率测度的规范性定义中只有“空集的概率测度为零”一个规范性条件,因为结合此条件和概率测度的可加性可以得到“全空间概率测度为 1”的“归一化”条件。

由于 Choquet 容度规范性和单调性的约束性较为宽松, 所以在实际应用中需要外加约束条件,如 Choquet 容度的凸性(凹性)[②],即任意两个集合的并集容度和交集容度之和不小于(不大于)单个集合的容度之和。即便如此,在实际应用中,尤其是需要求解相关问题的解析解时,Choquet 容度和 Choquet 积分相关理论的缺陷将暴露无遗。Wang(2000)引入的一类特殊的扭曲概率[③]和 Peng(1997)引入的 g–期望和条件 g–期望可以部分解决 Choquet 积分存在的问题。扭曲概率表示对经典概率的尾概率事件发生的可能性进行放大或缩小调整,扭曲概率是一种特殊形式的 Choquet 容度,相当于在经典概率和 Choquet 容度之间搭建一座“桥梁”。g–期望的引入基于倒向随机微分方程的解,满足动态相容性,在处理定价、优化和风险管理等相关问题时较为便捷,但其与经典概率的相容性较弱。

总体而言,有关不确定性的刻画方式有多种,除前面介绍的 Choquet 容度、扭曲概率和 g–期望外,还有 λ–模糊测度、0–1 模糊测度、可能性测度、可分解测度和可信测度等非可加集函数。然而,除前面提及的三种非可加集函数外,其他非可加集函数在金融经济的应用要么缺乏系统性,要么应用范围狭窄。为此,本文重点介绍 Choquet 容度和 Chqouet 积分在金融经济的相关应用,兼顾扭曲概率的应用综述。

三、与金融经济应用相关的 Choquet 积分理论结果

在经典的概率论中,基于概率测度可以定义两种随机变量的数学期望:一类是离散型随机变

① 给定状态空间 Ω,其幂子集为 2^{Ω},集类 $S\subset 2^{\Omega}$。称集函数 $\mu:S\to[0,1]$为容度,如果其满足(i)$\mu(\phi)=0,\mu(\Omega)=1$;(ii)$\mu(A)\leqslant\mu(B),\forall A\subset B$。

② $\mu(\cup)+\mu(\cap)\geqslant(\leqslant)\mu(A)+\mu(B),\forall A,B\in S$。

③ 给定概率测度 P, 单增函数 $\gamma:[0,1]\to[0,1]$满足 $\gamma(0)=0,\gamma(1)=1$ 此时称集函数 $\mu=\gamma o P$ 为扭曲概率,其中 γ 为扭曲子,刻画决策者对小概率事件的态度。

量的数学期望,采用求和方式;一类是连续型随机变量的数学期望,采用积分方式。这里,在利用积分定义连续型随机变量的数学期望时,我们首先需要确定随机变量的分布函数或概率密度。然而在 Choquet 容度框架下,我们尚未严格定义可测随机变量的分布函数或概率密度。为定义与数学期望相容的 Choquet 积分,Choquet(1953)基于数学期望的 Fubini 变换结果

$$\mathbb{E}[X]=\int_0^{\infty}\mathbb{P}(X\geqslant x)dx+\int_{-\infty}^{0}(\mathbb{P}(X\geqslant x)-1)dx,$$

引入如下形式的 Choquet 积分

$$\mu[X]=\int_0^{\infty}\mu(X\geqslant x)dx+\int_{-\infty}^{0}(\mu(X\geqslant x)-1)dx,$$

其中 $\mathbb{P}$ 为概率测度,$X\in L^{\infty}(S)$为有界可测随机变量。注意,当容度为扭曲概率时,上式即是关于扭曲概率的 Choquet 积分。

熟知,由概率测度的可加性知基于数学期望的定价法则满足线性性。然而,在利用 Choquet 积分对金融资产进行定价时,由于 Choquet 容度不满足可加性,所以基于 Choquet 积分的 Choquet 定价并不满足可加性,但可以证明其满足共单调①可加性,这是 Choquet 定价区别于数学期望定价的最主要特征。Choquet 积分除满足共单调可加性外,还满足单调性、正齐性和平移不变性等与数学期望相容的性质,参见 Schmeidler(1986)。

期望效用公理化的等价条件是偏好关系满足弱序、单调、连续和独立性,其背后蕴含的数学基础是数学期望的表示定理,即映射具有数学期望表示的充要条件是映射满足单调和可加性。为给出期望效用的推广结果——Choquet 期望效用,Schmeidler(1986) 基于 Greco(1982)的结果给出 Choquet 积分的表示定理,即映射具有 Choquet 积分表示的充要条件是其满足单调性和共单调可加性。对应于期望效用框架下的风险厌恶和风险溢价概念,基于 Choquet 期望效用我们可以给出不确定性厌恶和不确定性溢价的概念,Choquet 积分的 Jensen 不等式在刻画不确定性厌恶性质或对不确定性溢价进行比较静态分析时有重要应用,Choquet 积分不等式成立的充要条件是容度(μ)在任意集合处的取值大于其对偶容度②($\bar{\mu}$)的相应取值(Hu,2005)。

除此之外,为给出一致风险度量的 Choquet 积分推广版本,有关上(下)Choquet 积分的表示定理参见 Song and Yan(2006a,b)。再者,在求解 Choquet 期望效用框架的最优问题,时常遇到随机变量函数的 Choquet 积分求解问题,为此王增武(2007)给出随机变量函数 Choquet 积分的 L-S 表示。在有关 Choquet 积分的理论结果中,目前最大的难点和公开问题是条件 Choquet 积分的刻画,其本质就是条件容度的定义,这方面的研究成果很多,但尚未达成共识,有待进一步研究的公开问题。

四、Choquet 期望效用理论

例 2(Allais 悖论)假定状态空间中有 0M、1M 和 5M 三个结果,其中 M 表示百万美元,Allias 设计如下四种彩票

$$A=\left\{0,\frac{89}{100};1M,\frac{11}{100};5M,\frac{0}{100}\right\};B=\left\{0,\frac{90}{100};1M,\frac{0}{100};5M,\frac{10}{100}\right\};$$

① 称随机变量 X 和 Y 共单调,如果对状态 ω_1,ω_2 而言有 $X(\omega_1)>X(\omega_2)$,则有 $Y(\omega_1)>Y(\omega_2)$,反之易成立。简言之,共单调就是同增共减。

② 对偶容度$\bar{\mu}(A)=1-\mu(A^C)$,$\forall A\in 2^{\Omega}$ 其中 A^C 表示集合 A 的余集。特别地,概率测度的对偶概率测度就是其自身。

$C=\{0,0;1M,1;5M,0\}$；$D=\left\{0,\frac{1}{100};1M,\frac{89}{100};5M,\frac{10}{100}\right\}$。

其中 A 表示以 89%、11%和 0%的概率分别得到 0、1M 和 5M，其他彩票定义相同。用彩票 A、B、C、D 对实验对象进行测验的结果为 $B\geqslant A$、$C\geqslant D$，这表明

$0.1U(100)+0.9U(0)>0.11U(100)+0.89U(0)$,

$U(100)>0.1U(500)+0.89U(100)+0.01U(0)$,

其中 U 表示实验对象的效用函数，整理上述两式知他们之间是相互矛盾的，这就是著名的 Allais 悖论，有时也称为违背期望效用独立性公理的相同比率问题。

Allais 悖论和违背概率测度可加性的 Ellsberg 悖论并称为期望效用框架下的两大悖论。为解释悖论，诸多学者对经典的期望效用理论进行推广，如主观权重效用(Subjectively Weighted Utility)、一般效用模型(Generalized Utility Model)、展望理论(Prospect Theory)和非可加期望效用(Non-additive Utility Model，简称“非期望效用”)等，更多其他推广参见 Machina(2008)。

以下，我们简要介绍基于扭曲概率的序依赖期望效用(Rank-dependent Expected Utility，RDEU)(Quiggin，1982)和 Choquet 容度的 Choquet 期望效用(Choquet Expected Utility，CEU)(Schmeidler，1989)的公理化刻画及相关结果。给定彩票空间上的偏好关系$\geqslant$，RDEU 成立①当且仅当$\geqslant$满足弱序、随机占优、连续性和等可能权衡相容性②四个条件。熟知，在经典的期望效用框架下，决策者对风险的态度和对财富边际效用的态度均由效用函数的性质来刻画。RDEU 的最大亮点之一在于将上述两种态度的刻画分离，前者用扭曲子的性质来刻画，后者用效用函数的性质来刻画，解决了效用函数的“一肩挑”问题。在 RDEU 框架下，Ryan(2006)证明四种不同的风险厌恶定义具有如下递推关系：强风险厌恶⇒Jewitt 风险厌恶⇒单调风险厌恶⇒弱风险厌恶。

给定彩票空间上的行动全体 L_0，其上的偏好关系$\geqslant$满足弱序、共单调独立③、连续性、单调性和非退化性当且仅当 CEU 成立④。进一步，CEU 框架下的不确定厌恶定义⑤等价于决策者的容度满足凸性⑥。另外，Eichberger et al.(2005)研究 CEU 的动态相容性问题，虽然最终结论满足当前常见的五种更新准则，但其普适性依然有待进一步提高。

作为对本节开头的回应，以下我们给出如何利用 RDEU 解释 Allais 悖论的严格推导。在 RDEU 框架下 $U(0)=0$，假定，由 $B\geqslant A$，$C\leqslant D$ 知

$\gamma(0.1)U(500)>\gamma(0.11)U(100)$,

$\gamma(0.1)U(500)<[1+\gamma(0.1)-\gamma(0.99)]U(100)$,

只要扭曲子连续可微且严格凸，则上述两式完全相容⑦。

---

① $X\geqslant Y\Leftrightarrow\mu(U(X))\geqslant\mu(U(Y))$，其中 $\mu=\gamma\circ P$，U 为决策者的效用函数。

② 弱序、随机占优和连续性的定义同经典期望效用偏好中的定义相同。以下，仅介绍等可能权衡相容性的定义。记 $X^*\triangleq\left(x_1,\frac{1}{n};\cdots;x_n,\frac{1}{n}\right)$为等可能性彩票，即每一结果发生的可能性相同，记$(\alpha,X^*_{-i})$表示用 α 代替 X^* 中的第 i 个元素。称$(\alpha,\beta)\geqslant^*(\xi,\delta)$，如果存在彩票 X^*，Y^* 使得$(\alpha,X^*_{-i})\geqslant(\beta,Y^*_{-i})$且$(\xi,X^*_{-i})\leqslant(\delta,Y^*_{-i})$。等可能权衡相容性(Trade-off Consistency for Equally Likely Outcomes)表示不存在 α,β,ξ,δ 使得$(\alpha,\beta)\geqslant^*(\xi,\delta)$和$(\alpha,\beta)<^*(\xi,\delta)$同时成立。

③ 给定任意两两共单调的行动 X,Y,Z 及 $\alpha\in(0,1)$，由 $X\geqslant Y$ 知 $\alpha X+(1-\alpha)Z\geqslant\alpha Y+(1-\alpha)Z$。

④ $X\geqslant Y\Leftrightarrow\mu(U(X))\geqslant\mu(U(Y))$其中 μ 为容度，U 为决策者的效用函数。

⑤ $X\sim Y\Rightarrow\alpha X+(1-\alpha)Y\geqslant X$。目前，有关不确定性厌恶定义的最好结果由 Epstein(1999)给出，但也依然存在争议。

⑥ $\forall A,B\in S,\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)\geqslant\mu(A)+\mu(B)$。

⑦ 事实上，

$[1+\gamma(0,1)-\gamma(0.99)]U(100)-\gamma(0.11)U(100)$

$=[\gamma(1)-\gamma(0.99)-(\gamma(0.1)-\gamma(0.1))]U(100)$

$=[\gamma'(x_1)-\gamma'(x_2)]\times0.01\times U(100)$

其中 $x_1\in(0.99,1)$，$x_2\in(0.1,0.11)$。

五、Choquet 定价理论

例 3(违背买卖平价关系的案例)给定风险资产 S,记 C^S 和 P^S 分别表示执行价格为 K 的看涨和看跌期权,进一步假定无风险资产的价格为 1。熟知,在线性定价法则 $I(\cdot)$下,如下买卖平价关系成立,

$$I(P^S)=I(C^S)-I(S)+K,$$

但在实际操作中,时常会遇到违背买卖平价关系的现象,参见 Sternberg(1994)。在 Choquet 定价法则下,可以解释上述现象。

假定风险资产 S 有两个状态$\{\omega_1,\omega_2\}$,对应于两个状态的资产价格分别为 $K+h$ 和 $K-h$,同时假定两状态的容度满足条件 $\mu(\{\omega_1\})+\mu(\{\omega_2\})>1$,则由 Choquet 积分的基本性质得

$$\mu(C^S)+\mu(-S)+K=h\mu(\{\omega_1\})-K-h+2h\mu(\{\omega_2\})+K$$
$$>\mu(\{\omega_2\})=\mu(P^S),$$

这表明 Choquet 定价可解释违背满足买卖平价关系的现象。

除解释上述悖论外,Choquet 定价还可以解释违背方差界不等式的现象(Dow and Werlang,1992(b))和投资惰性问题(Dow and Werlang,1992(a))。为“捕捉”金融市场中的摩擦因素和投资者的不确定性厌恶情绪,Chateauneuf et al.(1996)首次提出利用 Choquet 积分对金融和保险产品进行定价。扭曲概率和基于扭曲概率的 Choquet 积分最初仅应用于保险市场中的定价问题,Wang et al.(2000)提出的特殊扭曲概率定价不仅可以应用于保险市场中的定价问题,同时可以应用于金融市场中的定价问题,如对 CAPM 和传统期权定价结果的推广等,所以后人称这一特殊扭曲概率为“王变换”(Wang Transform)。其中,特殊扭曲子的数学表达式为

$$r(x)=\Phi_X(\Phi_X^{-1}+\beta),\beta\in\mathbb{R}$$

其中 Φ_X 为标准正态分布函数的分布函数。Hamada and Sherris(2003)将上述扭曲子中的标准正态分布推广到对称分布情形,并证明经典的风险中性定价只是扭曲概率定价的特例而已①。利用倒向随机微分方程理论,Chen and Kulperger(2006)研究上(下)Choquet 定价和最大(小)定价②的等价条件,结论是只有当随机变量函数中的函数满足单调条件时二者才会相等。

六、保险市场理论

例 4(保险市场中的市场失灵问题)假定投保人的初始财富为 w,记 $\omega,\overline{\omega}$分别表示损失发生和损失不发生两个状态,d 表示损失发生时投保人的损失额度,保险合同(α,β)中的 α 表示投保人的保费额度,β 表示保险公司的理赔额度。另外,p_1 和 p_2 表示保险公司对损失发生和损失不发生估计的可能性,$\overline{p}_1$ 和$\overline{p}_2$ 表示投保人对损失发生和损失不发生估计的可能性。请注意,保险公司和投保人对状态估计的可能性之和并不一定为 1,所以记 $1-p_1-p_2\triangleq p_0$ 且 $1-\overline{p}_1-\overline{p}_2\triangleq\overline{p}_0$。此时,进一步假设:

第一,投保人和保险公司对状态空间的信息不对称,即他们对损失发生和损失不发生估计的可能性不同。

第二,投保人和保险公司都是不确定性厌恶的,但投保人和保险公司对待风险的态度不同,前者是风险厌恶的,后者是风险中性的。则经过运算可以得到表 1 的最优均衡解。

① 当扭曲子的参数 β 为风险资产的 Sharp 比(单位风险的溢价)时,基于扭曲概率的欧式期权价格退化为风险中性定价。

② 给定概率测度族 Δ,定义容度 $\mu(A)=sup_{P\in\Delta}\mathbb{P}(A)$,则定价关系$\prod(X)=\mu(X)$称为上 Choquet 定价,定价关系$\prod(X)=sup_{P\in\Delta}\mathbb{E}_P(X)$称为最大定价。同理,下 Choquet 定价和最小定价可类似定义。

表 1　不同信息情况下的均衡解和敏感性分析

信息情况	具体表达式	均衡解	敏感性分析
对称信息	$p_1=\bar{p}_1, p_2=\bar{p}_2, p_0=\bar{p}_0$	$\beta=p_1 d, \alpha=(1-p_1)d$	不确定行程度提高，保费额度也相应提高，但理赔额度却有所降低
不对称信息：保险公司信息充分	$p_1>\bar{p}_1, p_2>\bar{p}_2, p_0>\bar{p}_0$	$\beta=p_1 d$	均衡解完全依赖保险公司的信息
不对称信息：投保人信息充分	$p_1<\bar{p}_1, p_2<\bar{p}_2, p_0<\bar{p}_0$	不存在	投保人无法购买到满意的合同，市场失灵

这表明在 Choquet 定价和 CEU 框架下，保险市场中存在市场失灵现象，解释了原来框架下不能解释的问题，详细推导参见 Anwar and Zheng(2012)。

上例表明，基于 Choquet 定价的均衡理论可以解释保险市场失灵问题。Choquet 定价和Choquet 期望效用在保险市场中的应用主要体现在两个方面：第一，保费原理的公理化刻画。Wang et al.(1997)证明保费原理满足共单调可加、单调性、条件状态独立①和连续性②时当且仅当其可以表示成关于扭曲概率的 Choquet 积分。Cardin and Ferretti(2001)将这一结果推广到 Choquet 容度情形，充要条件是保费原理满足单调性、正齐性、保常性、弱共单调可加性③和一致连续性④。第二，金融数学中的几乎所有风险度量(VaR、TVaR、一致风险度量和凸风险度量等)都可由期望或非期望效用框架下的效用等价原理⑤导出，这也是目前金融数学领域学者和保险领域学者因争夺风险度量“发明权”而“互相打架”的原因之一，参见 Denuit et al.(2006)。

七、投资消费储蓄理论

例 5(均值-方差偏好关系违背单调性)假定状态空间中四个状态的概率取值相等且均为 1/4，彩票 f 在四个状态下的收益分别为 1、2、3 和 4，彩票 g 在四个状态的收益分别为 1、2、3 和 5。给定均值-方差偏好的解析表达式为

$$U_\theta(f)=\mathbb{E}_P[f]-\frac{\theta}{2}Var_{\mathbb{P}}[f],$$

其中 θ 表示投资者的风险厌恶系数，$\mathbb{E}_P$和 $Var_{\mathbb{P}}$ 分别表示概率测度 $\mathbb{P}$ 下的数学期望和方差。简单计算得

$$U_2(f)=1.25>0.5625=U_2(g),$$

也就是说在 $\theta=2$ 的均值-方差偏好下，决策者应该选择 f 而不是 g，但显然彩票 g 的收益明显严格优于彩票 f 的收益，这表明传统的均值-方差偏好可能会违背偏好关系的单调性。

有鉴于此，Maccheroni et al.(2006) 在给定的概率测度集下给出满足偏好单调性的单调均值-方差偏好的公理化刻画，主要理念在于对彩票收益中扩大方差部分的尾部进行截尾处理，如对例 5 中的彩票 g 进行截尾处理后可以得到其在第四个状态的收益是比 5 小的收益，但同时还能保证其单调均值-方差效用大于彩票 f 的单调均值-方差效用。类似于均值-方差的讨论，该文还给出了最优单调-均值方差投资组合的解析解以及单调形式的 CAPM 等。

在面对固定收益债券和浮动收益债券时，虽然浮动收益债券具有博取高收益或规避通货膨胀

---

① 条件独立性表示保费原理 $H(X)$ 仅依赖于 X 的分布函数，与各状态的具体取值无关。

② $lim_{a\to 0}H(X-X\wedge a)=H(X)$，$lim_{b\to\infty}H(X\wedge b)=H(X)$。

③ $H(X)=H(X\wedge\lambda)+H(X-X\wedge\lambda)$，$\lambda\in\mathbb{R}$。

④ 当 H_n 一致收敛于 X 时有，$lim_{n\to\infty}H(X_n)=H(X)$。

⑤ 给定初始财富 w，假定决策者的效用函数满足 $U(0)=0$，$U(1)=1$，记 $\mathbb{E}$ 为期望或非期望算子，满足方程 $U(w)=\mathbb{E}[U(w+H(X)-X)]$ 的保费原理 $H(X)$ 称为由效用等价原理导出的保费原理。

风险等诸多优点，但多数投资者依然选择固定收益债券，Shiller将此定义为债券投资之谜，Mukerji and Tallon(2004)在Choquet期望效用框架下部分解释了上述悖论。Miao(2004)基于Gilboa and Schmeidler(1989)的最大最小期望效用理论研究不确定性环境下的最优投资消费策略，分收入随机和投资收益随机两种情形，在CARA等特殊效用函数下给出最优解的显式表达式。

如果将投资者分为有经验投资者和无经验投资者两类的话，实证研究表明无经验投资者常常很少参与风险资产的投资，称此为非参与之谜。Elasey and O'Hara(2009)从投资者的不确定厌恶角度对此给于解释，假定有经验投资者可以唯一确定风险资产的分布函数，并采用经典的期望效用理论作为其财富最大化的目标函数；而无经验投资者则只能确定风险资产的一族分布函数，且采用Gilboa and Schmeidler(1989)的最大最小期望效用作为其财富最大化的目标函数。在此假设条件下，求解无经验投资者的参与均衡解和非参与均衡解。为提高无经验投资者的参与度，Elasey and O'Hara(2009)提出推行存款保险制度和增加风险资产投资的担保措施等七条政策建议。

Nishimura and Ozaki(2007)，Schröder(2006)以及Miao and Wang(2011)在不确定性状态下研究不可逆投资问题[①]，前两篇文章主要研究连续时间k-不确定情形的最大最小期望效用和α-最大最小期望效用框架下的不可逆最优投资问题，最后一篇文章研究离散状态下的不可逆最优投资问题。Wang(2010)利用倒向随机微分方程理论推广Nishimura and Ozaki(2007)的相关结果，并简化主要证明，从经济含义上讲，考虑决策者不仅是不确定厌恶的同时也是风险厌恶的的情形；从数学方面来看，倒向随机微分方程大大简化了原文中的繁琐证明；从实操层面而言，在利润过程遵从几何布朗运动和对数效用函数的假设条件下，可以分别求出使用专利、等待以及临界点利润的解析表达式，结合数值分析方法进行风险参数和不确定性参数的敏感性分析，实证结果与直觉和实际情况完全相符。

八、宏观经济理论

虽然Knight(1921)便将不确定性引入到经济金融的研究领域，但如果追溯不确定性在宏观经济理论研究中的应用，其历史较短，但却异常活跃，尤其是这次金融危机之后，这一点在格林斯潘、伯南克和特里谢的演讲中均可得到印证。如在2004年的美国经济学会上，格林斯潘在题为"货币政策中的风险和不确定性"的演讲中谈到"不确定性不仅仅是货币政策制定过程中的一个普遍特征，而是一个确定特征"(Greenspan，2004)；伯南克在2007年的一次讲话中提到"经济状态和经济结构中的不确定性都是货币政策制定过程中必要考虑的因素"(Bernanke，2007)；在2008年欧洲央行的第五次会议上，特里谢明确表示"过去10年来，金融震荡的一个主要原因是市场中不确定性的加大"(Trichet，2008)。

就本轮金融危机的成因方面而言，Krishnamurthy(2009)提出不确定性对流动危机的放大作用。直观解释为，在标准数理模型中总假定3A级债券的违约概率为零。然而，次贷危机中3A级债券违约等小概率事件的发生导致投资者不得不调整原来的评估模型，放大3A级债券的违约率，将其原来投资于3A级的资产转向更加安全的无风险投资投资，从而收紧了市场中的流动性，进一步导致流动性资产的价格较低和3A级债券的违约，投资者更加转向无风险资产的资，……如此循环往复，从而导致全球金融危机的不断深化。进一步，当金融危机发生时，任何单一金融机构都无法确定其在危机中的风险敞口，因为不同交易机构的风险敞口不同，且当危机发生时，资产的低流动性也给资产估值带来了难度，进而又加大了个体确定其对市场风险敞口的难度。

① 不可逆投资问题主要特征有三：其一，未来的市场环境是不确定的；其二，初始投资是沉没成本；其三，投资机会将存续一段时间，并不立即消失。典型不可逆投资问题如石油钻井平台的建设等。

Krishnamurthy(2009)中讨论的不确定性主要是指状态不确定性,Pritsker(2009)则研究结构不确定性(确切地说是参数不确定性)对资金融入融出利差的影响,进而分析其对全球金融危机的影响。具体而言,银行间债券市场中交易价格和无风险利率之间的利差主要由资金融入方的违约概率和违约回收率决定,其中违约概率的大小与资金融入方的贷款投资组合密切相关。资金融出方有时难以确定资金融入方的确切贷款投资组合,Pritsker(2009)称此为结构不确定性。该文主要讨论柜台交易和交易所交易两种情形,在交易所交易情形中又进一步讨论了两部门贷款情形,在两部门贷款情形中又讨论了引入中小银行和贷款需求不确定性两种随机扰动情形。

公司与员工签订的工资合同有固定工资合同和基于某一指数(如 CPI 等)的浮动工资合同,Muker and Tallon(2004)在公司和员工均不确定性厌恶、公司风险中性、员工风险厌恶的假设条件下研究固定工资和浮动工资的最优投资组合问题,简单描述的结论为只要状态发生的可能性存在不确定性,员工将会选择固定工资而非浮动工资。Zhao(2007)假定市场中有理性期望预期和适应期望预期两种类型的经济决策者,在包含消费欧拉方程和动态定价方程的新 Keynesian 模型下,研究不确定性厌恶环境下最小化通货膨胀、GDP 增长率和利率调整三者方差的加权平均为目标函数的最优决策问题。在解析解不存在的条件下,通过校准非政策性参数和利用错误概率甄别法、模拟退火算法(Simulated annealing algorithm)和实证分析等方法依次确定其他参数。

九、结　语

Knight(1921)首次将风险和不确定性的含义进行区分,并讨论不确定性对企业利润的影响。Choquet(1953)给出与概率测度相容的刻画不确定性的集函数——Choquet 容度,同时给出基于 Choquet 容度的 Choquet 积分。Schmeidler(1989)探求偏好关系具有 Choquet 期望效用刻画的等价条件。至此,真正拉开 Choquet 积分在金融经济领域的应用,主要涉及领域为前文综述的非期望效用、资产定价、保险领域、投资消费储蓄领域和宏观经济领域等。事实上,Choquet 容度和 Choquet 积分在人文社会科学的其他诸多领域均有重要应用,如多准则决策问题等。

然而,纵观本综述文后的参考文献可以发现,目前基于 Choquet 容度和 Choquet 积分的金融经济研究至少存在三个方面的不足:第一,目前仅处于“糊泥巴”的“补洞”式研究,即如何弥补基于传统概率论在金融经济研究方面的缺陷,并未形成独立的研究体系;第二,与 Choquet 容度和Choquet 积分对应的条件 Choquet 容度和条件 Choquet 积分的定义在学术界并未获得一致认可, 有待进一步的研究;第三,即便是对传统的金融经济理论进行“漏洞”式研究,但证明的假设条件都非常严格或反例的假设条件也非常特殊,并不具有普适性。

科学史研究发现,每一门真正可以称之为科学的学科,其成长过程都要经历描述性、分析型和工程化这三个阶段。一门科学学科只有在工程化之后,才能大规模地创造出经济和社会效益。目前,有关 Choquet 容度和 Choquet 积分在金融经济领域的应用研究尚处于描述性和分析性的中间阶段,并未形成独立的研究体系。有鉴于此,未来研究的落脚点应着眼于如下四个方面:第一,条件 Choquet 容度和条件 Choquet 积分的合理定义,这是基础。第二,理性的合理定义,期望效用和非期望效用的理论基础是假定决策者在某一偏好关系下是理性的,到底何为理性? 目前也没有统一答案。第三,效用的合理定义,如何从社会科学和心理角度度量个人幸福感/效用?是否人生来就不该享有幸福,最优目标在于减少痛苦呢? 这依然是值得探索的研究课题之一。第四,非期望效用理论的进一步发展,基于概率论的非期望效用和基于非可加集函数的非期望效用(典型代表分别为 RDEU 和 CEU)孰优孰劣?亦或有其他更优选择?目前国内对不确定性在金融经济领域的应用研究较少,本综述仅仅是个开始,期望引起国内同行的兴趣和关注。

参考文献:

Anwar, S. and M. Zheng(2012):"Competitive Insurance Market in the Presence of Ambiguity", *Insurance: Mathematics and Economics*, 50, 79-84.

Bernanke, B.(2007):"Monetary Policy under Uncertainty", paper at the 32nd Annual Economic Policy Conference, Federal Reserve Bank of St. Louis.

Cardin, M. and P. Ferretti(2001):"On the Use of Capacities in Representing Premium Calculations Principle", *Decision in Economics and Finance*, 24, 71-77.

Chateauneuf, A., R. Kast and A. Lapied,(1996):"Choquet Pricing for Financial Markets with Frictions", *Mathematical Finance*, 6, 323-330.

Chateauneuf, A., R. Kast and A. Lapied(2001):"Conditioning Capacities and Choquet Integrals: the Role of Comonotony", *Theory and Decision*, 51, 367-386.

Chen, Z. and R. Kulperger(2006):"Minimax Pricing and Choquet Pricing", *Insurance: Mathematics and Economics*, 38, 518-528.

Choquet, G.(1953):"Theory of Capacity", *Annales de l'Institute Fourier(Grenoble)*, 5, 31-295.

Cohen, M., I. Gilboa, J. Jaffray and D. Schmeidler(2000):"An Experimental Study of Updating Ambiguous Beliefs", *Risk, Decision, and Policy*, 5, 123-133.

Dempster, A.(1967):"Upper and Lower Probability Induced by A Multi-Valued Mapping", *Annals of Mathematical Statistics*, 38, 325-339.

Denneberg, D.(1994):*Non-additive Measure and Integral*, Kluwer Academic Publishers.

Denneberg, D.(2002):"Conditional Expectation for Monotone Measures: the Discrete Case", *Journal of Mathematical Economics*, 37, 105-121.

Denuit, M., J. Dhaene, M. Goovaerts, R. Kaas and R. Laeven(2006):"Risk Measurement with Equivalent Utility Principles", *Statistics and Decisions*, 24, 1-25.

Dow, J. and S. Werlang(1992a):"Uncertainty Aversion, Risk Aversion and the Optimal Choice of Portfolio", *Econometrica*, 60, 197-204.

Dow, J. and S. Werlang(1992b):"Excess Volatility of Stock Prices and Knightian Uncertainty", *European Economic Review*, 36, 631-638.

Easley, D. and M. O'Hara(2009):"Ambiguity and Nonparticipation: the Role of Regulation", *Review of Financial Study*, 22, 1817-43.

Eichberger, J. and D. Kelsey(1994):"Non-additive Beliefs and Game Theory", University of Melbourne, Working paper.

Eichberger, J., S. Grant and D. Kelsey (2005):"CEU Preference and Dynamic Consistency", *Mathematical Social Science*, 49, 143-151.

Epstein, L.(1999):"A Definition of Uncertainty Aversion", *Review of Economic Study*, 66, 579-608.

Ghirardato, P.(1997):"On Independence for Non-Additive Measures: with A Fubini Theorem", *Journal of Economic Theory*, 73, 261-291.

Gilboa, I. and D. Schmeidler(1989):"Maxmin Expected Utility with Non-Unique Prior", *Journal of Mathematical Economics*, 18, 141-153.

Gilboa, I. and D. Schmeidler(1993):"Updating Ambiguous Beliefs", *Journal of Economic Theory*, 59, 33-49.

Grabisch, M.(1996):"The Application of Fuzzy Integrals in Multi-Criteria Decision Making", *European Journal of Operational Research*, 89, 445-456.

Graf, S.(1980):"A Radon-Nikodym Theorem of Capacity", *Journal furdie reine und angewandte Mathematik*, 75, 192-214.

Greco, G.(1982):"Sulla rappresentazione di funzionali medianteintegrali", Rendiconti del Seminario Matematico dell'Universit'a di Padova, 66, 21-42.

Greenspan, A.(2004):"Risk and Uncertainty in Monetary Policy", *American Economic Review*, 94, 33-40.

Hamada, M. and M. Sherris(2003):"Contingent Claim Pricing Using Probability Distortion Operators: Methods from Insurance Risk Pricing and Their Relationship to Financial Theory", *Applied Mathematical Finance*, 10, 19-47.

Hu, Y.(2005):"On Jensen's Inequality for g-Expectation and for Nonlinear Expectation", *Archiv der Mathematik*, 85, 572-580.

Huber, P.(1973):"The Use of Choquet Capacities in Statistics", *Bulletin of the International Statistical Institute*, 45, 181-191

Huber, P. and U. Strassen(1973):"Minimax Tests and the Neyman-Pearson Lemma for Capacities", *Annals of Statistics*, 1, 251-263.

Jin, H. and X. Zhou(2008):"Behavioral Portfolio Selection in Continuous Time", *Mathematical Finance*, 18, 385-426.

Knight, F.(1921):Risk, *Uncertainty and Profit*, Boston: Houghton Mifflin Co.

Kojadinovic, I.(2007):"Minimum Variance Capacity Identification", 177, 498-514.

Krishnamurthy, A.(2009):"Amplification Mechanisms in Liquidity Crises", *NBER working papers*, No. 15040.

Lapied, A. and R. Kast, 2005, "Updating Choquet Valuation and Discounting Information Arrivals", Working Papers, 05-09, LAMETA, University of Montpellier.

Lehrer, E.(2005): "Updating Non-Additive Probabilities——A Geometric Approach", *Games and Economic Behavior*, 50, 42-57.

Maccheroni, F. and M. Marinacci(2005): "A Strong Law of Large Numbers of Capacities", *Annals of Probability*, 33, 1171-1178.

Maccheroni, F., M. Marinacci, A. Rustichini and M. Taboga(2009): "Portfolio Selection with Monotone Mean-Variance Preferences", *Mathematical Finance*, 19, 487-521.

Machina, M.(2008): "Non-Expected Utility Theory", in S. Durlauf and L. Blume(eds.), *The New Palgrave Dictionary of Economics*, 2nd edition, New York: Macmillan.

Marichal, J.(2000): "An Axiomatic Approach of the Discrete Choquet Integral as A Tool to Aggregate Interacting Criteria", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8, 800-807.

Marichal, J.(2002): "Entropy of Discrete Choquet Capacities", *European Journal of Operational Research*, 137, 612-624.

Miao, J.(2004) "A Note on Consumption and Savings under Knightian Uncertainty", *Annals of Economics and Finance*, 5, 299-311.

Miao, J. and N. Wang(2011): "Risk, Uncertainty, and Option Exercise", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 35, 442-461.

Mukerji, S. and J. Tallon (2004): "Ambiguity Aversion and the Absence of Wage Indexation", *Journal of Monetary Economics*, 51, 653-670.

Nishimura, K. and H. Ozaki (2007): "Irreversible Investment and Knightian Uncertainty", *Journal of Economic Theory*, 136, 668-694.

Ouiggin, J.(1982): "A theory of Anticipated Utility", *Journal of Economic Behavior and Organization*, 3, 323-343.

Peng, S.(1997): "Backward SDE and Related g-expectation", *in Backward Stochastic Differential Equations*, Pitman Research Notes in Math. Series, No. 364, 141-159.

Pritsker, M.(2009): "Knightian Uncertainty and Interbank Lending", mimeo, Federal Reserve Board.

Ryan, J.(2006): "Risk Aversion in RDEU", *Journal of Mathematical Economics*, 42, 675-697.

Shafer, G.(1976): *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton: Princeton University Press.

Shapley, L.(1953): *A Value for N-person Games*, in "Contribution to the Theory of Games", in H. Kuhn and A. Tucker(eds.), *Contributions to the Theory of Games*, vol. II, Princeton University Press.

Schied, A.(2007): "Optimal Investments for Risk-and Ambiguity-Averse Preferences: A Duality Approach", *Finance and Stochastic*, 11, 107-129.

Schmeidler, D.(1986): "Integral Representation without Additivity", *Proceeding of the American Mathematical Society*, 92, 255-261.

Schmeidler, D.(1989): "Subjective Probability and Expected Utility without Additivity", *Econometrica*, 57, 571-587.

Schroöder, D.(2006): "Investment under Ambiguity with the Best and Worst in Mind", working paper.

Song, Y. and J. Ya(2006a): "The Representations of Two Types of Functional on $L^\infty(\Omega,F)$ and $L^\infty(\Omega,F,P)$", *Science in China, Series A-Mathematics*, 49, 1376-1382.

Song, Y. and J. Yan(2006b): "Risk Measures with Comonotonic Subadditivity or Convexity and Respecting Stochastic Orders", Working paper.

Sternberg, J.(1984): "A Re-Examination of Put-Call Parity on Index Futures", *Journal of Futures Markets*, 14, 79-101.

Trichet, J.(2008): "Undervalued Risk and Uncertainty: Some Thoughts on the Market Turmoil", *Speech at the Fifth ECB Central Banking Conference*.

Wang, S., V. Young and H. Panjer(1997): "Axiomatic Characterization of Insurance Prices", *Insurance: Mathematics and Economics*, 21, 173-183.

Wang, S.(2000): "A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks", 67, 15-36.

Wang, Z. and J. Yan(2007): "A Selective Overview of Applications of Choquet Integrals", *Advanced Lectures in Mathematics*, pp. 484-515.

Wang, Z.(2010): "Irreversible Investment of the Risk- and Uncertainty-averse DM under k-Ignorance: the Role of BSDE", *Annals of Economics and Finance*, 11, 313-335.

Wasserman, L. and J. Kadane(1990): "Bayes' Theorem for Choquet Capacity", *Annals of Statistics*, 18, 1328-1339.

Wasserman, L.(1990): "Belief Function and Statistical Inference", *Canadian Journal of Statistics*, 18, 183-196.

Zhao, M.(2007): "Monetary Policy under Misspecified Expectations", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 31, 1278-1299.

Zhou, L. (1998): "Integral Representation of Continuous Comonotonically Additive Functionals", *Transactions of American Mathematical Society*, 350, 1811-1822.

(责任编辑:罗　滢)